Gradientenabstiegsverfahren Vollständige Lösung

Beispiel: $f(x) = x^2 + 2y^2 + 2xy - 6x - 16y + 41$ $P_0 = (1, 3)$ $\lambda = 1$

1. Gradient bestimmen

$$grad\big(f(x,y)\big) = \begin{pmatrix} 2x + 2y - 6 \\ 4y + 2x - 16 \end{pmatrix}$$

1.2. Gradient für den Startpunkt bestimmen

$$grad\big(f(1,3)\big) = \begin{pmatrix} 2*1 + 2*3 - 6 \\ 4*3 + 2*1 - 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1.3. Gradient normieren

Länge des Gradienten ermitteln

$$\big|grad\big(f(1,3)\big)\big| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} \approx 2{,}83$$

Länge des Gradienten normieren

$$grad\big(f(1,3)\big) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} * \frac{1}{\sqrt{8}} = \begin{pmatrix} 0{,}707 \\ -0{,}707 \end{pmatrix}$$

2. Suchgerade bilden

$$v(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda * -\begin{pmatrix} 0{,}707 \\ -0{,}707 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -0{,}707 \\ 0{,}707 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}29 \\ 3{,}71 \end{pmatrix}$$

3. Funktionswerte bestimmen

$$f(1,3) = 1^2 + 2*3^2 + 2*1*3 - 6*1 - 16*3 + 41 \quad = 12$$

$$f(0{,}29; 3{,}71) = 0{,}29^2 + 2*3{,}71^2 + 2*0{,}29*3{,}71 - 6*0{,}29 - 16*3{,}71 + 41 = 9{,}66$$

4. Optimierung bestimmen

$$O = f(1,3) - f(0{,}29; 3{,}71) = 2{,}34$$

Solange O positiv ist wird das Verfahren so fortgesetzt, anderenfalls wird λ halbiert.

Weiterer Rechenweg ohne genauere Erklärung:

$$grad\big(f(0{,}29; 3{,}71)\big) = \begin{pmatrix} 2*0{,}29 + 2*3{,}71 - 6 \\ 4*3{,}71 + 2*0{,}29 - 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -0{,}58 \end{pmatrix}$$

$$\big|grad\big(f(0{,}29; 3{,}71)\big)\big| = \sqrt{2^2 + (-0{,}58)^2} \approx 2{,}08$$

$$\big|\big|grad\big(f(0{,}29; 3{,}71)\big)\big|\big| = \begin{pmatrix} 2 \\ -0{,}58 \end{pmatrix} * \frac{1}{2{,}08} = \begin{pmatrix} 0{,}96 \\ -0{,}28 \end{pmatrix}$$

$$v(x) = \begin{pmatrix} 0{,}29 \\ 3{,}71 \end{pmatrix} + \lambda * -\begin{pmatrix} 0{,}96 \\ -0{,}28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}67 \\ 3{,}99 \end{pmatrix}$$

$$f(-0{,}67; 3{,}99) = (-0{,}67)^2 + 2*3{,}99^2 + 2*(-0{,}67)*3{,}99 - 6*(-0{,}67) + 16*3{,}99 + 41 \\ = 8{,}1225$$

$$O = f(0{,}29; 3{,}71) - f(-0{,}67; 3{,}99) = 1{,}5375$$

$$grad\big(f(-0{,}67; 3{,}99)\big) = \begin{pmatrix} 0{,}64 \\ -1{,}38 \end{pmatrix}$$

$$\big|grad\big(f(-0{,}67; 3{,}99)\big)\big| = \sqrt{0{,}64^2 + (-1{,}38)^2} \approx 1{,}52$$

$$\big|\big|grad\big(f(-0{,}67; 3{,}99)\big)\big|\big| = \begin{pmatrix} 0{,}64 \\ -1{,}38 \end{pmatrix} * \frac{1}{1{,}52} = \begin{pmatrix} 0{,}42 \\ -0{,}91 \end{pmatrix}$$

$$v(x) = \begin{pmatrix} -0{,}67 \\ 3{,}99 \end{pmatrix} + \lambda * -\begin{pmatrix} 0{,}42 \\ -0{,}91 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}09 \\ 4{,}9 \end{pmatrix}$$

$$f(-1{,}09; 4{,}9) = 7{,}66$$

$$O = f(-0{,}67; 3{,}99) - f(-1{,}09; 4{,}9) = 0{,}4625$$

$$grad\big(f(-1{,}09; 4{,}9)\big) = \begin{pmatrix} 1{,}62 \\ 1{,}42 \end{pmatrix}$$

$$\big|grad\big(f(-1{,}09; 4{,}9)\big)\big| = 2{,}15$$

$$\big|\big|grad\big(f(-1{,}09; 4{,}9)\big)\big|\big| = \begin{pmatrix} 0{,}75 \\ 0{,}66 \end{pmatrix}$$

$$v(x) = \begin{pmatrix} -1{,}09 \\ 4{,}9 \end{pmatrix} + \lambda * - \begin{pmatrix} 0{,}75 \\ 0{,}66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}84 \\ 4{,}24 \end{pmatrix}$$

$$f(-1{,}84; 4{,}24) = 7{,}93$$

$$O = f(-1{,}09; 4{,}9) - f(-1{,}84; 4{,}24) = -0{,}27 \implies \lambda = \frac{\lambda}{2} = 0{,}5$$

$$v(x) = \begin{pmatrix} -1{,}09 \\ 4{,}9 \end{pmatrix} + \lambda * - \begin{pmatrix} 0{,}75 \\ 0{,}66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}47 \\ 4{,}57 \end{pmatrix}$$

$$f(-1{,}47; 4{,}57) = 7{,}19$$

$$O = f(-1{,}09; 4{,}9) - f(-1{,}47; 4{,}57) = 0{,}47$$

$$grad\big(f(-1{,}47; 4{,}57)\big) = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ -0{,}66 \end{pmatrix}$$

$$\big|grad\big(f(-1{,}47; 4{,}57)\big)\big| = \sqrt{0{,}2^2 + (-0{,}66)^2} \approx 0{,}69$$

$$\big|\big|grad\big(f(-1{,}47; 4{,}57)\big)\big|\big| = \begin{pmatrix} 0{,}28 \\ -0{,}96 \end{pmatrix}$$

$$v(x) = \begin{pmatrix} -1{,}47 \\ 4{,}57 \end{pmatrix} + \lambda * - \begin{pmatrix} 0{,}28 \\ -0{,}96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}98 \\ 4{,}72 \end{pmatrix}$$

$$f(-1{,}98; 4{,}72) = 7{,}146$$

$$O = f(-1{,}47; 4{,}57) - f(-1{,}98; 4{,}72) = 0{,}044$$

$$grad\big(f(-1{,}98; 4{,}72)\big) = \begin{pmatrix} -0{,}52 \\ -1{,}08 \end{pmatrix}$$

$$\big|grad\big(f(-1{,}47; 4{,}57)\big)\big| = \sqrt{(-0{,}52)^2 + (-1{,}08)^2} \approx 1{,}2$$

$$\big|\big|grad\big(f(-1{,}47; 4{,}57)\big)\big|\big| = \begin{pmatrix} -0{,}43 \\ -0{,}9 \end{pmatrix}$$

$$v(x) = \begin{pmatrix} -1{,}98 \\ 4{,}72 \end{pmatrix} + \lambda * - \begin{pmatrix} -0{,}43 \\ -0{,}9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}76 \\ 5{,}17 \end{pmatrix}$$

$$f(-1{,}76; 5{,}17) = 7{,}193$$

$$O = f(-1{,}98; 4{,}72) - f(-1{,}76; 5{,}17) = -0{,}047 \Rightarrow \lambda = \frac{\lambda}{2} = 0{,}25$$

$$v(x) = \begin{pmatrix} -1{,}98 \\ 4{,}72 \end{pmatrix} + \lambda * - \begin{pmatrix} -0{,}43 \\ -0{,}9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}87 \\ 4{,}945 \end{pmatrix}$$

$$f(-1{,}87; 4{,}945) = 7{,}009$$

$$O = f(-1{,}98; 4{,}72) - f(-1{,}87; 4{,}945) = 0{,}137$$

$$grad\big(f(-1{,}87; 4{,}945)\big) = \begin{pmatrix} 0{,}15 \\ 0{,}04 \end{pmatrix}$$

$$\left|grad\big(f(-1{,}87; 4{,}945)\big)\right| = \sqrt{0{,}15^2 + 0{,}04^2} \approx 0{,}16$$

$$\left|\left|grad\big(f(-1.87; 4{,}95)\big)\right|\right| = \begin{pmatrix} 0{,}9 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}$$

$$v(x) = \begin{pmatrix} -1{,}87 \\ 4{,}945 \end{pmatrix} + \lambda * -\begin{pmatrix} 0{,}9 \\ 0{,}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}1 \\ 4{,}8825 \end{pmatrix}$$

$$f(-2{,}1; 4{,}8825) = 7{,}06$$

$$O = f(-1{,}87; 4{,}945) - f(-2{,}1; 4{,}8825) = -0{,}051 \Rightarrow \lambda = \frac{\lambda}{2} = 0{,}125$$

$$v(x) = \begin{pmatrix} -1{,}87 \\ 4{,}945 \end{pmatrix} + \lambda * -\begin{pmatrix} 0{,}9 \\ 0{,}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}99 \\ 4{,}915 \end{pmatrix}$$

$$f(-1{,}99; 4{,}915) = 7{,}01$$

$$O = f(-1{,}87; 4{,}945) - f(-1{,}99; 4{,}915) = -1 * 10^{-3} \Rightarrow \lambda = \frac{\lambda}{2} = 0{,}0625$$

$$v(x) = \begin{pmatrix} -1{,}87 \\ 4{,}945 \end{pmatrix} + \lambda * -\begin{pmatrix} 0{,}9 \\ 0{,}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}929 \\ 4{,}929 \end{pmatrix} = 7{,}005$$

$$O = f(-1{,}87; 4{,}945) - f(-1{,}929; 4{,}929) = 4 * 10^{-3}$$

Da die Änderung O nun so klein geworden ist können wir hier an der Stelle sagen das für uns der Punkt (-1,929; 4,929) das lokale Minimum der Funktion ist.